Wintersemester 2025/26
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
10. Übung

1. Betrachten Sie eine Min-Cost-Flow-Instanz (G, u, b, c) mit $u \in \mathbb{N}^{E(G)}$ und $b \in \mathbb{Z}^{V(G)}$. Es sei $r \in V(G)$, und wir definieren eine Perturbation der Knotenbalancen um $\varepsilon \in \mathbb{R}^{V(G)}$ durch $\varepsilon(r) = -\frac{n-1}{n}$ und $\varepsilon(v) = \frac{1}{n}$ für $v \in V(G) \setminus \{r\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Fluss auf jeder Baumkante einer zulässigen Spannbaum-Struktur (r, T, L, U) für $(G, u, b + \varepsilon, c)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{n}$ und außerdem größer als 0 und kleiner als die Kantenkapazität ist.

   (b) Verwenden Sie Teil (a), um zu zeigen, dass der Netzwerk-Simplex-Algorithmus das perturbierte Problem in pseudopolynomieller Zeit löst, und zwar unabhängig von der Wahl der Kante, die in T aufgenommen wird.

   (c) Zeigen Sie, dass eine Spannbaum-Struktur (r, T, L, U) genau dann für (G, u, b, c) stark zulässig ist, wenn sie für $(G, u, b + \varepsilon, c)$ stark zulässig ist. Schließen Sie daraus, dass der Netzwerk-Simplex-Algorithm auf (G, u, b, c) eine pseudopolynomielle Laufzeit hat.

   (2+2+2 Punkte)

2. Man beschreibe eine Turingmaschine mit Alphabet $\{0, 1, \#\}$, die zwei binäre Strings vergleicht: Der Input bestehe aus einem String $a\#b$ mit $a, b \in \{0, 1\}^*$, und der Output sei 1 für $a = b$ und 0 für $a \neq b$. (4 Punkte)

3. Für konstantes $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ sei Φ eine k-Band-Turingmaschine, die eine Sprache L berechnet. Zeigen Sie, dass es dann eine (1-Band-)Turingmaschine Φ' gibt, die ebenfalls L berechnet, sodass $\mathrm{time}(\Phi', x) = O((\mathrm{time}(\Phi, x))^2)$ für jede Eingabe x gilt. (5 Punkte)

4. Turingmaschinen können selbst auch durch binäre Strings kodiert werden. Betrachten Sie das Halteproblem: Gegeben seien zwei binäre Strings x und y, wobei x eine Turingmaschine Φ kodiert. Es soll entschieden werden, ob $\mathrm{time}(\Phi, y) < \infty$ gilt.
   Zeigen Sie, dass dieses Problem unentscheidbar ist, dass es also keinen Algorithmus für das Halteproblem gibt. (5 Punkte)
   Hinweis: Nehmen Sie an, dass es einen solchen Algorithmus A gibt. Dann konstruiere man eine Turingmaschine, die für den Input x zunächst A auf den Input (x, x) anwendet und genau dann terminiert, wenn $\mathrm{output}(A, (x, x)) = 0$.

Sie finden den aktuellen Übungszettel stets auf der Übungs-Seite der Vorlesung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws25/edm_uebung_ws25.html`

Abgabe: Donnerstag, den 15.1.2026, 16:00 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

`https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_3864991.html`