Lineare und Ganzzahlige Optimierung

WS 2008/2009

Übungszettel 11

Aufgabe 1:
In dieser Aufgabe wenden Sie die Lagrange Relaxierung auf Linearen Gleichungssystemen an. Sei $\mathcal{Q}$ eine endliche Menge von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b' \in \mathbb{R}^m$. Beweisen Sie, dass

$$\min\{\max\{c^T x + \lambda^T (b' - A'x) : x \in \mathcal{Q}\} : \lambda \in \mathbb{R}^m\}$$

$$= \max\{c^T y : y \in \operatorname{conv}(\mathcal{Q}), A'y = b'\}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Das Rucksackproblem ist ein bekanntes NP-schweres Optimierungsproblem. Gegeben eine Menge von Objekte j mit zugehörigen Profit p_j und Gewicht w_j, wird eine Teilmenge dieser Objekte gesucht, die den Profit maximieren ohne ein vorgegebenes Kapazitätslimit c zu überschreiten. Wir möchten hier das Problem betrachten, bei dem jedes Objekt kein, ein oder mehrere Male ausgewählt werden kann. Diese Variante wird auch Unbeschränktes Rucksackproblem genannt.

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \\ & x_j \in \{0, 1, \ldots\} \quad 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Ein Tourist möchte die folgenden Gegenstände mit in den Urlaub nehmen:

Gegenstand	p_j	w_j
Hemd	3	10
Hose	4	11
T-Shirt	2	8
Schuhe	5	14
Jacke	4	12

a) Erweitern Sie die Definition von 'minimalen Cover' sinnvoll und geben Sie mindestens 3 weitere starke Ungleichungen an.

b) Die Kapazität des Rucksacks ist $c = 31$. Formulieren Sie das zugehörige IP und lösen Sie es mit Hilfe des Computers.

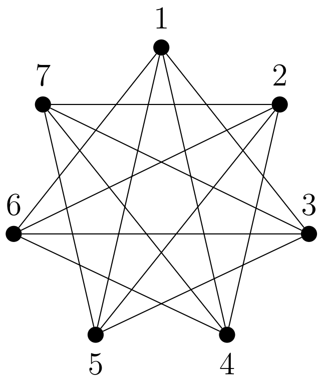
   Geben Sie an, wieviele Schritte Sie mit und ohne den zusätzlichen starken Ungleichung benötigt haben.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Beim Knoten Packung Problem wird eine maximale Menge von Knoten gesucht, so dass für jedes Paar von ausgewählten Knoten i, j gilt: $(i, j) \notin E$.
Die Variable x_i gibt an, ob der Knoten i ausgewählt wurde ($x_i = 1$) oder nicht ($x_i = 0$). Dann erhalten wir folgende Nebenbedingung:

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E$$

Betrachte nun das Knoten Packung Problem auf den folgenden Graphen:



a) Zeigen Sie sowohl kombinatorisch als auch algebraisch, dass für das Knoten Packung Problem für den obigen Graphen zusätzlich die folgende Nebenbedingung gilt:

$$\sum_{i=1}^{z} x_i \leq 2.$$

b) Formulieren Sie nun das Problem als IP.

c) Lösen Sie das IP.

(6 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 22.01.09, **vor** der Vorlesung