Lineare und Ganzzahlige Optimierung

WS 2008/2009

Übungszettel 5

Aufgabe 1:
Im Job-Assignment-Problem sind n Jobs mit Zeitbedarf $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ und m Arbeiter gegeben. Die Menge $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$ gibt an, welche Arbeiter den Job i ausführen können ($i \in \{1, \ldots, n\}$). An jedem der Jobs könne gleichzeitig beliebig viele Arbeiter aus S_i arbeiten. Ein Arbeiter kann an verschiedenen Jobs arbeiten, jedoch nur nacheinander. Überzeugen Sie sich, dass mit dem folgenden LP die Gesamtzeit für die Erledigung aller Jobs minimiert kann. Die Variable x_{ij} bezeichnet die Zeit, die Arbeiter j insgesamt an Job i arbeitet.

$$\begin{array}{lrl} \min\{T : & x_{ij} \geq 0 & (i \in \{1, \ldots, n\}, j \in S_i) \\ & \sum_{j \in S_i} x_{ij} = t_i & (i \in \{1, \ldots, n\}) \\ & \sum_{i : j \in S_i} x_{ij} \leq T & (j \in \{1, \ldots, m\})\} \end{array}$$

a) Stellen Sie das duale LP auf.

b) Geben Sie für $n = 2$ und $t_1, t_2 > 0$ einen direkten Algorithmus an, der eine optimale primale und eine optimale duale Lösung findet, und begründen Sie seine Korrektheit.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Lösen Sie folgende LPs mit der Simplex-Methode. Geben Sie hierbei in jedem Schritt an, welche Variable die Basis verlässt und welche Variable in die Basis kommt. Geben Sie auch eine optimale Lösung entsprechend der Aufgabe an.

a)

$$\max x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & 3x_1 + x_2 & \leq & 3{,}5 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

b)

$$\min \; -3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 & \geq & 2 \\ & -x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & & x_i \geq 0 & \end{array}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Benutzen Sie das Simplex-Verfahren, um folgendes LP zu lösen. Geben Sie, wenn vorhanden, eine weitere optimale Lösung an. Gibt es noch eine dritte?

$$\max\ 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Ein Stromlieferant betreibt drei Kraftwerke, von denen vier Städte mit Strom versorgt werden sollen. Die einzelnen Kraftwerke können die folgenden Energiemengen liefern (in Millionen kWh):

- Kraftwerk 1: 35
- Kraftwerk 2: 50
- Kraftwerk 3: 40

Der Verbrauch der einzelnen Städte (ebenfalls in Millionen kWh) sieht so aus:

- Stadt 1: 45
- Stadt 2: 20
- Stadt 3: 30
- Stadt 4: 30

Die Einträge der folgenden Tabelle geben die Kosten (in $) an, um 1 Million kWh von einem bestimmtem Kraftwerk zu einer bestimmten Stadt zu schicken:

	Stadt 1	Stadt 2	Stadt 3	Stadt 4
Kraftwerk 1	8	6	10	9
Kraftwerk 2	9	12	13	7
Kraftwerk 3	14	9	16	5

Es soll nun entschieden werden, wieviel Strom die einzelnen Kraftwerke in welche Städte liefern. Formulieren Sie dieses Problem als LP, und lösen Sie es.

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 27.11.08, **vor** der Vorlesung