Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 7. Dezember, vor der Vorlesung

Übungsblatt 7

Aufgabe 38:
Falls nichts anderes gesagt wird, betrachten wir im folgenden immer ein LP in Standardform $\min c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rg(A) = m$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, und machen Sie sich gegebenenfalls auch Gedanken darüber, welche *Teil*aussagen richtig oder falsch sind.

a) Hat das LP min $c^T x$ s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$ einen endlichen Optimalwert, so ist das LP min $c^T x$ s. t. $Ax = b'$, $x \geq 0$ für alle b' beschränkt.

b) Zu jedem LP in n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP in $n+1$ nichtnegativen Variablen.

c) Die beiden LPs min $c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ und min $-c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ können beide zulässige Lösungen mit beliebig großem Zielfunktionswert haben.

d) Ist $A = A^T$, so ist jede zulässige Lösung des LP min $c^T x$ s. t. $Ax = c$ optimal.

e) Falls keine Ecke entartet und das LP nach oben beschränkt ist, so ist die Optimallösung eindeutig.

f) Ist eine unbeschränkte Variable x_j durch $x_j^+ - x_j^-$ $(x_j^+, x_j^- \geq 0)$ ersetzt worden, so ist im Simplexverfahren in jedem Schritt höchstens eine der Variablen x_j^+, x_j^- ungleich null.

(12 Punkte)

Aufgabe 39:
Gegeben sei folgendes LP: $\min c^T x$, s.d. $Ax = b$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rg(A) = m$. Ferner sei eine optimale Lösung mit Basisindexmenge Z gegeben. Nun ersetzten wir b durch $b + \lambda d$ mit λ Skalar und $0 \neq d \in \mathbb{R}^m$. Unter welchen Voraussetzungen ist die Basisindemenge Z optimal für alle $\lambda \geq 0$?

(6 Punkte)

A.40 + A.41 $\rightarrow$

Aufgabe 40:
Lösen Sie das folgende lineare Programm mit Hilfe des dualen Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{lrrrcl}
\max & -4x_1 & -6x_2 & -18x_3 & & \\
\text{s. t.} & 2x_1 & & +3x_3 & \geq & 3 \\
 & & +3x_2 & +2x_3 & \geq & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 41:
Um eine zulässige Startecke für das LP

$$\begin{array}{lrcl}
\max & c^T x & & \\
\text{s.t.} & Ax & \leq & \text{b} \\
 & x & \geq & 0
\end{array} \tag{LP}$$

zu erhalten (b ist nicht notwendig ≥ 0), betrachten wir alternativ zur Vorlesung das LP

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & z & & & & \\
\text{s.t.} & Ax & - & bz & \leq & 0 \\
 & & & z & \leq & 1 \\
 & & & x, z & \geq & 0.
\end{array} \tag{LP'}$$

(LP') wird mit dem Simplexalgorithmus gelöst. Wie kann man aus einer Ecke die (LP') optimal löst eine zulässige Ecke für (LP) erhalten oder entscheiden, dass es keine solche gibt? Geben Sie ein Verfahren an, begründen Sie die Korrektheit und wenden Sie es auf die beiden folgenden LPs an.

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -6 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

(6 Punkte)