Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, **9. November**, vor der Vorlesung

Übungsblatt 3

Aufgabe 12:
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene und konvexe Menge und $x \in M$. Existiert ein $a \in \mathbb{R}^n$, so daß $a^T x > a^T y$ für alle $y \in M \setminus \{x\}$ gilt, so ist x eine Ecke von M.

(6 Punkte)

Aufgabe 13:
Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie jeweils ihre Behauptung.

(i) Eine nicht-leere und konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, die keine Gerade ganz enthält, besitzt eine Ecke.

(ii) Eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, die eine Ecke besitzt, enthält keine Gerade ganz.

(iii) Eine nicht-leere, konvexe und abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^n$, die keine Gerade ganz enthält, besitzt eine Ecke.

(iv) Eine konvexe und abgeschlossene Menge im $\mathbb{R}^n$, die eine Ecke besitzt, enthält keine Gerade ganz.

(6 Punkte)

Aufgabe 14:
Beweisen Sie den Satz von Birkhoff und von Neumann: Die Ecken der abgeschlossenen und konvexen Menge der doppelt-stochastischen Matrizen

$$M = \left\{ A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\ge 0} \mid \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} = 1 \text{ für alle } 1 \le i_0, j_0 \le n \right\}$$

sind genau die Permutationsmatrizen, d.h. die Elemente von $M \cap \{0,1\}^{n \times n}$.

(10 Punkte)

Aufgabe 15:
Sei $M \subset \mathbb{R}^2$, $\emptyset \neq M \neq \mathbb{R}^2$, M abgeschlossen mit $\mathbb{R}^2 \setminus M$ und M konvex.
Zeigen Sie, daß M ein Halbraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(6 Punkte)

A.16 - A.21 →

Aufgabe 16:
Zeigen Sie:
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$, M abgeschlossen und konvex. Dann ist die Menge der Ecken von M abgeschlossen.

(6 Punkte)

Aufgabe 17:
Zeigen Sie: Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, so gilt $\overline{\text{conv}(S)} = \text{conv}(\overline{S})$.

(10 Punkte)

Aufgabe 18:

a) Seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß $\text{cone}(a_1, \ldots, a_m)$ abgeschlossen ist.

b) Ist auch $\text{cone}(A)$ abgeschlossen für alle $A \subset \mathbb{R}^n$?

(6 Punkte)

Aufgabe 19:
Beweisen Sie folgenden Satz von Kirchberger: Es seien $X = \{x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y = \{y_1, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $|X \cup Y| = k+m \geq n+2$ so, daß $\text{conv}(X \cap S) \cap \text{conv}(Y \cap S) = \emptyset$ für alle $S \subseteq X \cup Y$ mit $|S| = n+2$ gilt.
Zeigen Sie, daß $\text{conv}(X) \cap \text{conv}(Y) = \emptyset$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 20: "Helly's second Theorem"
Es sei $\mathcal{M}$ eine Familie von abgeschlossenen und konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$, so daß

(i) jeweils $n+1$ der Mengen in $\mathcal{M}$ einen nicht-leeren Schnitt haben und

(ii) eine endliche Teilmenge $\mathcal{M}'$ von $\mathcal{M}$ existiert, für die $\cap_{M \in \mathcal{M}'} M$ beschränkt ist.

Zeigen Sie, daß $\cap_{M \in \mathcal{M}} M \neq \emptyset$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 21:
Beweisen Sie folgenden Satz von Santalo: Sei $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ eine Familie von parallelen Liniensegmenten $S_i \subset \mathbb{R}^2$. Die Liniensegmente können dabei auch einzelne Punkte sein. Gibt es für je drei beliebige Elemente aus $\mathcal{S}$ eine Gerade, die all diese drei Elemente schneidet, dann gibt es auch eine Gerade, die alle Elemente aus $\mathcal{S}$ schneidet.

(6 Punkte)