Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 11. Januar 2005, vor der Vorlesung

Übungsblatt 10

Aufgabe 50:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix, λ_1 der kleinste Eigenwert und λ_n der größte Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$\mathrm{B}(x, \sqrt{\lambda_1}) \subseteq \mathrm{Ell}(A, x) \subseteq \mathrm{B}(x, \sqrt{\lambda_n})$$

(6 Punkte)

Aufgabe 51:
Wir möchten die Ellipsoidmethode auf ein konkretes Beispiel anwenden. Dafür betrachten wir die Menge

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \, x_1 + x_2 < 2, \, -2x_1 + 2x_2 < 1, \, -x_2 < 0\}.$$

Wir gehen (ohne Beweis) davon aus, dass für $x \in P$ gilt: $|x_j| \leq 3$ $(j = 1, 2)$.
Als Startellipsoid wählen wir $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \, \frac{1}{18}x_1^2 + \frac{1}{18}x_2^2 \leq 1\} = \mathrm{Ell}(A_0, x_0)$, also $A_0 = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ und $x_0 = (0, 0)^T$.

a) Angenommen es gilt vol(P) $> \frac{1}{100}$ oder $P = \emptyset$. Zeigen Sie, dass nach spätestens 87 Iterationen die Ellipsoidmethode entweder eine zulässige Lösung findet oder P leer ist.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Ellipsoidmethode eine zulässige Lösung oder stellen Sie fest, dass P leer ist. (Sie erhalten ihre neuen Ellipsoide $E_{t+1} = \mathrm{Ell}(A_{t+1}, x_{t+1})$ gemäß

$$A_{t+1} = \frac{n^2}{n^2 - 1}\left(A_t - \frac{2}{n+1}\frac{(A_t a_k)(A_t a_k)^T}{a_k^T A_t a_k}\right),$$

$$x_{t+1} = x_t - \frac{1}{n+1}\frac{A_t a_k}{\sqrt{a_k^T A_t a_k}}$$

wobei a_k zu einer im jeweiligen Schritt verletzten Ungleichung $a_k^T x_t < b_k$ gehört.) Rechnen Sie ab der zweiten Iteration nur auf zwei Nachkommastellen genau.

c) Skizzieren Sie P und die im Algorithmus berechneten Punkte x_t und Ellipsoide E_t.

d) Berechen Sie die Quotienten $\mathrm{vol}(E_{t+1})/\mathrm{vol}(E_t)$ der im Algorithmus berechenten Ellipsoide.

(6 Punkte)

Aufgabe 52:
Sei P ein Polytop in $\mathbb{R}^n$ mit $0 \in \mathrm{Inn}(P)$. Wir definieren den Polar von P als

$$P^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq 1 \quad \forall x \in P\}$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) P° ist ein Polytop mit $0 \in \mathrm{Inn}(P^\circ)$.

b) $(P^\circ)^\circ = P$.

c) x ist genau dann eine Ecke von P, wenn $x^T y \leq 1$ eine Facette von P definiert.

(6 Punkte)