Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 16. Dezember, vor der Vorlesung

Übungsblatt 9

Aufgabe 39:
Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$ Matrix mit rationalen Einträgen.
Zeigen Sie, dass $\text{size}(A^{-1}) \leq 4n^2\text{size}(A)$.

(7 Punkte)

Aufgabe 40:
Seien A eine Matrix und b ein Vektor mit rationalen Einträgen.
Zeigen Sie: Hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung, so besitzt es auch eine Lösung deren Größe polynomiell beschränkt in der Größe von A und b ist.

(7 Punkte)

Aufgabe 41:
Sei A eine Matrix und b ein Vektor mit rationalen Einträgen. Zeigen Sie, dass genau eine der beiden folgenden Alternativen eintritt:

- Es gibt einen Vektor x mit $Ax = b$ wobei die Größe von x polynomiell in der Größe von A und b beschränkt ist.
- Es gibt einen Vektor y mit $y^T A = 0$ und $y^T b = 1$ wobei die Größe von y polynomiell in der Größe von A und b beschränkt ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 42:
Sei A eine $m \times n$ Matrix und b ein Spaltenvektor mit rationalen Einträgen so dass die Größe jeder Zeile der Matrix $[A\, b]$ kleiner gleich φ ist. Hat das System $Ax = b$ eine Lösung, dann existieren rationale Vektoren $x_o, \ldots, x_t$ mit Größe kleiner gleich $4n^2\varphi$ so dass

$$\{x \mid Ax = b\} = \{x_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_t x_t \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}\}$$

(10 Punkte)

→

Aufgabe 43:
Seien h_i die Zahlen aus dem Algorithmus zur Kettenbruchentwicklung (Continued Fraction Expansion). Zeigen Sie, dass $h_i \geq F_{i+1}\ \forall i$, wobei F_i die i-te Fibonacci Zahl ist ($F_1 = F_2 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 3$). Beachten Sie, dass folgende Gleichheit gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Folgern Sie, dass die Anzahl an Iterationen des Algorithmus zur Kettenbruchentwicklung $O(\log q)$ ist.

(10 Punkte)