Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 2. Dezember, vor der Vorlesung

Übungsblatt 7

Aufgabe 30:
Konstruieren Sie ein lineares Programm, bei dem der Simplex-Algorithmus bei ungünstiger Wahl der Pivotelemente in einen Zykel läuft. Führen Sie das Simplexverfahren auf diesem LP durch und zeigen Sie, dass Sie nach einigen Schritten tatsächlich wieder eine Basisindexmenge erzeugen, die schon vorher im Verfahren betrachtet wurde.

(10 Punkte)

Aufgabe 31:
Falls nichts anderes gesagt wird, betrachten wir im folgenden immer ein LP in Standardform $\min c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rg(A) = m$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist x^1 eine eindeutige optimale Basislösung und x^2 eine zweitbeste Basislösung mit echt größeren Kosten, so erhält man x^1 aus x^2 durch Austausch einer Basisvariablen.

b) Ist $A = A^T$, so ist jede zulässige Lösung des LP min $c^T x$ s. t. $Ax = c$ optimal.

c) Falls keine Basislösung degeneriert ist und das LP nach oben beschränkt ist, so ist die Optimallösung eindeutig.

d) Ist eine unbeschränkte Variable x_j durch $x_j^+ - x_j^-$ $(x_j^+, x_j^- \geq 0)$ ersetzt worden, so ist im Simplexverfahren in jedem Schritt höchstens eine der Variablen x_j^+, x_j^- ungleich null.

(10 Punkte)

Aufgabe 32:
Um eine zulässige Startecke für das LP

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & \text{b} \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(LP)}$$

zu erhalten (b ist nicht notwendig ≥ 0), betrachten wir alternativ zur Vorlesung das LP

$$\begin{array}{llcrcl} \max & z & & & & \\ \text{s.t.} & Ax & - & bz & \leq & 0 \\ & & & z & \leq & 1 \\ & & & x, z & \geq & 0. \end{array} \tag{LP'}$$

(LP') wird mit dem Simplexalgorithmus gelöst. Wie kann man aus einer Ecke die (LP') optimal löst eine zulässige Ecke für (LP) erhalten oder entscheiden, dass es keine solche gibt? Geben Sie ein Verfahren an, begründen Sie die Korrektheit und wenden Sie es auf die beiden folgenden LPs an.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & -6 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 33:
Gegeben seien die LPs

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{(LP)} & \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ (\text{LP}_\Delta) & \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b + \Delta \\ x & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

x^* sei eine nicht entartete Ecke, die (LP) optimal löst mit Wert $z^* = c^T x^*$, π^* eine Ecke die das zu (LP) duale Programm optimal löst. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass (LP_Δ) für alle $\Delta \in \mathbb{R}^m$ mit $-\epsilon < \Delta_i < \epsilon, i = 1, \ldots, m$ eine Optimallösung mit Wert

$$z^* + {\pi^*}^T \Delta$$

besitzt.

(10 Punkte)

Aufgabe 34:
Lösen Sie das folgende lineare Programm mit Hilfe des dualen Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{lrrrcl} \max & -4x_1 & -6x_2 & -18x_3 & & \\ \text{s. t.} & 2x_1 & & +3x_3 & \geq & 3 \\ & & +3x_2 & +2x_3 & \geq & 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(10 Punkte)