Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 11. November, vor der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 16:
Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{lrcr} \max & x_1 + x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Bestimmen Sie dazu das duale Programm (D) und zeigen Sie mit Hilfe eines Lemmas von Farkas, dass beide Polyeder P und D leer sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 17:
Gegeben sei das LP $\min\{c^T x \mid Ax = b\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Dualen, dass das LP entweder keine Lösung besitzt, unbeschränkt ist oder alle zulässigen Lösungen optimal sind. Gilt die Aussage auch noch, wenn man für das LP zusätzlich $x \geq 0$ fordert?

(5 Punkte)

Aufgabe 18:
Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme:

- Finde zu einem gegebenen LP eine zulässige Lösung oder stelle fest, dass es keine gibt.
- Finde zu einem gegebenen LP eine optimale Lösung oder stelle fest, dass es keine gibt.

Zeigen Sie, dass die beiden Probleme gleich schwer sind, d.h., kennt man einen (beliebigen) Algorithmus, der das eine löst, so kann man damit auch das andere lösen.

(10 Punkte)

→

Aufgabe 19:
Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{llllll} \min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +2x_2 & & \leq & 5 \\ & & x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(LP)}$$

1. Lösen Sie das LP graphisch.
2. Ermitteln Sie das zu LP duale Programm D.
3. Ermitteln Sie die Bedingungen des komplementären Schlupfes für das Problem und lösen Sie damit D.

(10 Punkte)

Aufgabe 20:
Ist der Punkt $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung des folgenden LPs?

$$\begin{array}{lrrrrrl} \max & 7x_1 & + 6x_2 & + 5x_3 & - 2x_4 & + 3x_5 & \\ \text{s.t.} & x_1 & + 3x_2 & + 5x_3 & - 2x_4 & + 2x_5 & \leq 4 \\ & 4x_1 & + 2x_2 & - 2x_3 & + x_4 & + x_5 & \leq 3 \\ & 2x_1 & + 4x_2 & + 4x_3 & - 2x_4 & + 5x_5 & \leq 5 \\ & 3x_1 & + x_2 & + 2x_3 & - x_4 & - 2x_5 & \leq 1 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Beantworten Sie die Frage mit Hilfe der Bedingungen des komplementären Schlupfes.
(10 Punkte)