Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 28. Oktober, vor der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 6: Beweisen Sie:
Es existiert kein $M \subset \mathbb{R}^2$, $|M| < \infty$ mit $\text{conv}(M) = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 7: Beweisen Sie den 2. Trennsatz:
Seien A, B konvex, $A, B \neq \emptyset, \text{d}(A, B) > 0$. Dann gibt es eine Hyperebene

$$H = \{x | a^T x + \alpha = 0\} \text{ mit } a^T x + \alpha > 0 \; \forall x \in A \text{ und } a^T y + \alpha < 0 \; \forall y \in B.$$

(6 Punkte)

Definition:
$M \subset \mathbb{R}^n$ Halbraum von $\mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ mit $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$.

Aufgabe 8: Sei $M \subset \mathbb{R}^2$, $\emptyset \neq M \neq \mathbb{R}^2$, M abgeschlossen mit $\mathbb{R}^2 \setminus M$ und M konvex.
Zeigen Sie, dass M ein Halbraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 9: Zeigen Sie:
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$, M abgeschlossen und konvex. Dann ist die Menge der Ecken von M abgeschlossen.

(10 Punkte)

Aufgabe 10: Beweisen Sie den Satz von Carathéodory:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \text{cone}(X)$.
Es existieren linear unabhänige Vektoren $v_1, \ldots, x_d \in X$ mit $x \in \text{cone}(x_1, \ldots, x_d)$.
Hinweis: siehe Satz 1.27 aus der Vorlesung.

(10 Punkte)