Sommersemester 2015
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
7. Übung

1. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine Unterteilung von G durch e, wenn $V(H) = V(G) \dot{\cup} \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G.

   (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H. Umgekehrt ist dies nicht der Fall.

   (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5.

   (c) Man folgere, daß ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (2+3+1 Punkte)

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph. Der Liniengraph von G ist definiert als Graph $L(G) = (E, F)$, wobei $F = \{\{e, e'\} \subseteq E \mid |e \cap e'| = 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Wenn G planar ist, dann ist auch der Liniengraph von G planar.

   (b) Wenn der Liniengraph von G planar ist, dann ist auch G planar. (2+2 Punkte)

3. (a) Sei G ein planarer zweifach zusammenhängender Graph. Zeigen sie, daß das planare Dual von G genau dann bipartit ist, wenn jeder Knoten in G geraden Grad hat.

   (b) Gibt es Triangulationen (siehe Aufgabe 3 des vorigen Zettels), in denen genau zwei Knoten ungeraden Grad haben und in denen diese beiden Knoten benachbart sind? (2+2 Punkte)

   Hinweis: Benutzen Sie Teil (a), um Teil (b) zu lösen.

4. Sei G ein Graph mit m Kanten. Zeigen Sie, daß es dann eine zulässige Knotenfärbung von G mit höchstens $\frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ Farben gibt. (2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 9.6.2015, vor der Vorlesung.

Ein Hinweis der Fachschaft Mathematik:
Die Fachschaft Mathematik feiert am 11.06 ihre Matheparty in der N8schicht. Der Vorverkauf findet am Mo. 8.06., Di. 9.06. und Mi. 10.06. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de