Mathematische Optimierung II
Sommersemester 2005

Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Ulrich Brenner

Übungsblatt 13

Aufgabe 1:

(a) Betrachten Sie das Multiset-Multicover-Problem. Bei diesem Problem ist für jedes Element e der Grundmenge eine Zahl $r_e \in \mathbb{N}$ gegeben, die angibt, wie oft e überdeckt werden muß. Es sind außerdem Multimengen statt Mengen zum Überdecken gegeben, d.h. die Multimengen können dasselbe Element mehrfach enthalten. Die Größe einer Multimenge S sei die Zahl ihrere Elemente, wobei jedes Element sooft gezählt wird, wie es in S vorkommt. Es sei nun m die Größe einer größten Multimenge. Geben Sie einen H_m-Faktor-Approximationsalgorithmus für das Multiset-Multicover-Problem an

(b) Betrachten Sie das ganzzahlige Programme der Form

$$\min\{cx \mid Ax \geq b, x \text{ ganzzahlig}, x \geq 0\},$$

wobei A, b und c nichtnegativ sein sollen. Solche ganzzahligen Programme heißen Covering-Integer-Programs. Geben Sie einen $O(\log n)$-Faktor-Approximationsalgorithmus für Covering-Integer-Programs an (mit $x \in \mathbb{R}^n$).

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Geben Sie einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit für das folgende Problem an: Zu einem gegebenen Graphen G mit nichtnegativen Knotengewichten und einer zulässigen (nicht notwendig optimalen) Knotenfärbung, soll eine Knotenüberdeckung mit Gewicht höchsten $(2 - \frac{2}{k})$OPT gefunden werden, wobei k die Zahl der benutzten Farben und OPT der Wert einer optimalen Lösung ist.

(4 Punkte)

(b.w.)

Aufgabe 3:
In dieser Übung soll ein kombinatorischer Algorithms entwickelt werden, um eine optimale halbintegrale Knotenüberdeckung zu finden.
Zu einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer nichtnegativen Kostenfunktion c auf den Knoten konstruieren wir wie folgt einen bipartiten Graph $H(V,', V'', E')$: Zu jedem Knoten $v \in V$ gibt es Knoten $v' \in V'$ und $v'' \in V''$ mit Kosten $c(v)/2$. Zu jeder Kante $\{u, v\} \in E$ gibt es zwei Kanten $\{u', v''\}, \{u'', v'\} \in E'$. Zeigen Sie, daß eine Knotenüberdeckung in H zu einer halbintegralen Knotenüberdeckung in G mit denselben Kosten korrespondiert. Benutzen Sie die Tatsache, daß eine optimale Knotenüberdeckung in einem bipartiten Graph in Polynomzeit gefunden werden kann, um eine optimale halbintegrale Knotenüberdeckung in G zu finden.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Betrachten Sie für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten w_e (für $e \in E$) das folgende ILP, das das Maximum-Weighted-Matching-Problem beschreibt:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{e \in E} w_e x_e & \\ \text{s.t.} & \sum_{e: v \in e} x_e \leq 1 & v \in V \\ & x_e \geq 0 & e \in E \\ & x_e \in \mathbb{Z} & e \in E \end{array}$$

Betrachten Sie auch die zugehörige LP-Formulierung, und geben Sie einen primal-dualen Algorithmus an, um zu zeigen, daß der Integrality Gap $\geq \frac{1}{2}$ ist.

(4 Punkte)

Abgabe: Freitag, 15. Juli 2005, vor der Vorlesung.