Mathematische Optimierung II
Sommersemester 2005

Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Ulrich Brenner

# Übungsblatt 8

**Aufgabe 1:**
Sei $A$ eine rationale Matrix. Der *Chvátal-Rang* von $A$ ist die kleinste Zahl $t$ für die $\{x : Ax \leq b\}^{(t)} = \{x : Ax \leq b\}_I$ für jeden ganzzahligen Vektor $b$ gilt. Der *starke Chvátal-Rang* von $A$ ist der Chvátal-Rang der Matrix $[I \ -I \ A \ -A]^T$.

Sei $A$ eine total unimodulare Matrix und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß der starke Chvátal-Rang von $nA$ höchstens 1 ist. (3 Punkte)

**Aufgabe 2:**
Betrachten Sie das *Gewichtete-Maximum-Clique-Problem* für ungerichtete Graphen, wie es als Beispiel in Kapitel 1.1 der Vorlesung eingeführt wurde. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^{V \cup E}$ das zugehörige Polytop, das durch die folgenden Ungleichungen beschrieben wird:

$$P: \quad \begin{array}{ll} y_e - x_i & \leq 0, \quad i \in e \in E \\ x_i + x_j - y_e & \leq 1, \quad e = ij \in E \\ 0 \leq x, y & \leq 1. \end{array}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, Schnittebenen (*Cutting Planes*) für $P$ zu ermitteln, d.h. gültige Ungleichungen für $P_I$. Seien dazu für einen Clique-Inzidenzvektor $(x, y) \in \mathbb{R}^{V \cup E}$ und für $S, T \subseteq V$ mit $S \cap T = \emptyset$

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i, \quad y(S) := \sum_{i,j \in S; i \neq j} y_{ij} \quad \text{und} \quad y(S,T) := \sum_{i \in S; j \in T} y_{ij}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $P$ voll-dimensional ist, d.h. $\dim(P) = n + \binom{n}{2}$.
(*Hinweis:* Finden Sie einen inneren Punkt von P.)

(b) Zeigen Sie, daß $P_I$ voll-dimensional ist.

(c) Zeigen Sie $x(S) - y(S) \leq 1$ für alle Mengen $S \subseteq V$ mit $|S| = 3$.

(d) Sei $S \subseteq V$ und $\alpha \in \mathbb{N}$. Die Verallgemeinerung der Ungleichung aus (c) ist die *Clique-Ungleichung*

$$\alpha x(S) - y(S) \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}. \qquad (1)$$

Beweisen Sie, daß jede Clique-Ungleichung eine gültige Ungleichung für $P_I$ ist.

(e) Die meisten der Clique-Ungleichungen aus (1) definieren sogar Facets von $P_I$: Für $S \subseteq V$ und $1 \leq \alpha \leq n-2$ wird die Ungleichung (1) für alle Inzidenzvektoren von Cliquen $C \subseteq V$ mit $|C \cap S| \in \{\alpha, \alpha+1\}$ mit Gleichheit erfüllt, und die Dimension der affinen Hülle dieser Inzidenzvektoren ist $\dim(P_I) - 1$, d.h. die affine Hülle ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{V \cup E}$.
Zeigen Sie diese Aussage für die Spezialfälle $S = V, \alpha = 1$ sowie $S \subseteq V, \alpha = 1$.

(f) Seien $S, T \subseteq V$ mit $S \cap T = \emptyset$. Die korrespondierende *Schnitt-Ungleichung* lautet

$$x(S) + y(S) + y(T) - y(S,T) \geq 0.$$

Beweisen Sie, daß jede Schnitt-Ungleichung eine gültige Ungleichung für $P_I$ ist. (14 Punkte)

**Aufgabe 3:**
Zeigen Sie, daß die in Kapitel 1.8 vorgestellte Branch-and-Bound-Methode kein polynomieller Algorithmus ist, d.h. die Laufzeit der Branch-and-Bound-Methode ist nicht polynomiell beschränkt durch die Größe ihres Inputs.

*Hinweis:*
Betrachten Sie das folgende ganzzahlige lineare Programm $\mathrm{ILP}_t$ für $t \in \mathbb{N}$:

$$\max\{\eta \,:\, 2^t\xi = (2^t+1)\eta;\, 0 \leq \xi \leq 2^t;\, \xi, \eta \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie, daß im $k$-ten Schritt der Branch-and-Bound Methode eines der paarweise disjunkten Polyeder die folgende Menge als Untermenge enthält:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \,:\, 2^t\xi = (2^t+1)\eta;\, 0 \leq \eta \leq 2^t - k \right\}.$$

(4 Punkte)

Abgabe: Freitag, 17. Juni 2004, vor der Vorlesung.