Mathematische Optimierung II
Sommersemester 2005

Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Ulrich Brenner

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:
Zeigen Sie die Existenz eines polynomiellen Algorithmus, der für eine ganzzahlige Matrix A und einen ganzzahligen Vektor b entweder eine ganzzahlige Lösung x von $Ax = b$ findet oder entscheidet, daß keine existiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, daß die beiden Systeme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \leq 0$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \leq 0$$

den gleichen Polyeder beschreiben und daß nur das erste System TDI ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, daß $a^T x \leq \beta$ für $a \in \mathbb{Z}^n$ und $\beta \in \mathbb{Q}$ genau dann TDI ist, wenn alle Einträge von a relativ teilerfremd sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $Ax \leq b$ TDI, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$ rational. Zeigen Sie, daß $\frac{1}{k}Ax \leq \alpha b$ TDI ist aber daß $\alpha Ax \leq \alpha b$ i.a. nicht TDI ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5:
Zeigen Sie, daß eine ganzzahlige Matrix A genau dann total unimodular ist, wenn das System $Ax \leq b$, $x \geq 0$ für alle Vektoren b TDI ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 6:
Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Zeigen Sie, daß $Ax \leq b$ genau dann TDI ist, wenn für alle ganzzahligen Vektoren c, für die $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ endlich ist,

$$\min\{y^T b \mid y \geq 0, y^T A = c^T, 2y \in \mathbb{Z}^m\}$$

endlich ist und durch eine ganzzahlige Optimallösung angenommen wird.

(8 Punkte)

Hinweis: Daß die Bedingung hinreichend ist, läßt sich wie folgt zeigen:
Betrachten Sie zunächst (für ein ganzzahliges c, für das $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ endlich ist)

$$\alpha_k := \min\{y^T b \mid y \geq 0, y^T A = kc^T, y \in \mathbb{Z}^m\}.$$

Zeigen Sie dann, daß für jedes $t \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{\alpha_{2^t}}{2^t} = \alpha_1$. Wenden Sie dann das folgende Lemma von Fekete [1923] an (das nicht bewiesen werden muß): Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_{k+l} \leq a_k + a_l$ für alle $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{k} = \inf_k \frac{a_k}{k}$$

Abgabe: Freitag, 27. Mai 2004, vor der Vorlesung.