Mathematische Optimierung II — Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Sommersemester 2004 — Sven Peyer

Übungsblatt 10

Aufgabe 1:
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie:
Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $x_1, \ldots, x_n \in K$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Anmerkung: Diese Ungleichung wird auch *Jensensche Ungleichung* genannt.

Aufgabe 2:

(a) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass alle lokalen Minima von f auch globale Minima sind.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\delta_i} \leq \sum_{i=1}^n \delta_i x_i,$$

($n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$, $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{i=1}^n \delta_i = 1$.)

Aufgabe 3:
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Ist f konvex, so ist die Menge $\{x \in K \mid f(x) \leq \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex.
Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 4:
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass alle Menge der globalen Minima von f konvex ist.

Aufgabe 5:
Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $D^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass f streng konvex ist. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 6:
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn $Epi(f)$ konvex ist.

Aufgabe 7:
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x \in K$. Zeigen Sie die Existenz eines n-Simplex S mit $x \in \overset{\circ}{S}$ und $S \subseteq K$.

Aufgabe 8:
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Für alle $x, y \in K$ existiere ein $\lambda \in (0,1)$ mit $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Zeigen Sie, dass f konvex ist.

Aufgabe 9:
Zeigen Sie, dass das Wolfe-duale eines LP das übliche duale LP ist.

Aufgabe 10:
Seien f, h_i, g_j wie in Satz 2.2.8 und sei $M[h,g] \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$\inf\{f(x) \mid x \in M[h,g]\} \geq \sup\{L(x,\lambda,\mu) \mid D_x L(x,\lambda,\mu) = 0, \mu \geq 0\}.$$

Für eine richtige Lösung von Aufgabe 8 gibt es 4 Punkte, für alle anderen Aufgaben 3 Punkte. Lösen Sie von den obigen zehn Aufgaben sieben ihrer Wahl. Es sind also maximal 21 Punkte für das Übungsblatt 10 zu erreichen. Wer Aufgabe 8 vollständig löst, kann einen Zusatzpunkt erlangen.

Abgabe: Dienstag, 6. Juli 2004, vor der Vorlesung.